

Parallélisation de calculs d'orbites

Jocelyne Erhel , Bernard Philippe , Stéphanie Rault

N° 3150

Avril 1997

_____ THÈME 4 _____

 ***apport
de recherche***

Parallélisation de calculs d'orbites

Jocelyne Erhel^{*}, Bernard Philippe[†], Stéphanie Rault[‡]

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Aladin

Rapport de recherche n° 3150 — Avril 1997 — 27 pages

Résumé : L'exploitation de satellites en orbite implique une évaluation précise et fréquente de leur position. Pour calculer la trajectoire du satellite, il faut résoudre un système d'équations différentielles du second ordre. Ce rapport étudie une méthode de résolution parallèle afin de réduire le temps de calcul. Le parallélisme repose sur une partition de l'intervalle de temps et des calculs simultanés dans chaque sous-intervalle. Des essais numériques montrent les limites et les potentialités de la méthode.

Mots-clé : Equations du mouvement, équations différentielles, schéma de Cowell, méthode de Newton, parallélisation "à travers le pas".

(Abstract: pto)

Ce travail a été financé en partie par le Centre National d'Etudes Spatiales (CNES), 3 avenue Edouard Belin, 31055 Toulouse (no de Contrat 194C4290031319011) et par la Région Bretagne (no de contrat 495C345003139061).

^{*} IRISA, erhel@irisa.fr

[†] IRISA, philippe@irisa.fr

[‡] IRISA, srault@irisa.fr

Parallelisation of satellite trajectories

Abstract: The control of satellites needs accurate and frequent evaluations of their position. Satellite trajectories are computed by solving a system of differential equations of second order. In this report, we study a parallel method in order to reduce computational time. The parallelism is based on a partition of the integration time and on simultaneous computations in each interval. Numerical results show limitations and potentialities of the method.

Key-words: Movement equations, differential equations, Cowell's scheme, Newton's method, parallelism "across the step".

1 Introduction

Le calcul d'une trajectoire de satellite en orbite se ramène à l'intégration d'un système d'équations différentielles du second ordre sur un long intervalle de temps. Le but de notre étude est d'établir une méthode parallèle qui permette d'atteindre à la fois vitesse et précision sur des machines parallèles de moyenne puissance.

Nous expliquerons, dans un premier temps, la mise en équation du problème et notamment le calcul du second membre de l'équation différentielle qui correspond aux forces agissant sur le satellite. Puis nous étudierons un schéma d'intégration du système différentiel basé sur la méthode de Cowell (cf [9]), qui utilise un schéma du type prédicteur-correcteur adapté à ce type de problème. Enfin, nous proposerons une méthode parallèle de calcul de trajectoires de satellites en orbite.

La parallélisation de tels calculs peut s'effectuer de trois manières différentes, on peut :

1. paralléliser à travers le problème,
2. paralléliser à travers le schéma,
3. paralléliser à travers l'intervalle d'intégration.

La technique de parallélisation appelée "à travers le problème" par Gear ([4]) consiste à répartir les composantes du second membre du système sur les différents processeurs. Dans notre problème, le calcul du second membre du système d'équations différentielles à résoudre est intrinsèquement séquentiel et la parallélisation de ce second membre ne donne pas de gain important. ([14]). La deuxième possibilité est de remplacer le schéma d'intégration par un schéma parallèle. Il existe plusieurs méthodes parallèles pour résoudre les équations différentielles notamment les méthodes DIMSIM (J.C.Butcher [10] et [11]), et les méthodes L-stables (P.Chartier [5]). L'ouvrage de K.Burrage ([12]) présente aussi un large éventail des méthodes parallèles pour les équations différentielles.

Pour notre étude, nous gardons le schéma d'intégration séquentiel de Cowell et nous nous intéressons à la troisième possibilité. Les méthodes de cette classe décomposent l'intervalle d'intégration en une liste de sous-intervalles sur lesquels on peut mener des intégrations indépendantes. Un procédé itératif de correction obtient la solution globale à la convergence. Il y a donc deux parties indépendantes dans cette méthode : la construction d'une estimation initiale de la solution et la définition de la correction itérative. Pour la première partie, nous avons utilisé des modèles analytiques classiques (équation de Kepler et modèle de Kozai donnés par exemple dans [19]). Il existe d'autres méthodes analytiques de calculs d'orbites qui sont basées sur des transformations de Lie ([18],[3], [2], [16], [17]). Pour la deuxième partie, nous avons utilisé la méthode développée par A.Bellen et M.Zennaro ([1]) ainsi que des travaux de P.Chartier ([6] et [15]).

La dernière partie sera consacrée à la mise en œuvre de la méthode sur une machine parallèle de moyenne puissance. Nous étudierons le comportement de la méthode dans le cas du calcul de l'orbite d'un satellite et nous comparerons notre méthode à la méthode séquentielle d'intégration des équations différentielles par le schéma de Cowell.

2 Le problème

Le calcul de la trajectoire d'un satellite en orbite consiste à résoudre une équation différentielle du second ordre ([19]). En effet l'équation du mouvement d'un satellite en orbite est donnée par

$$\overrightarrow{F} = m \overrightarrow{\ddot{r}}$$

avec :

m : la masse du satellite,

\overrightarrow{r} : le rayon vecteur (centre de la terre-satellite),

$\overrightarrow{\ddot{r}}$: l'accélération du vecteur \overrightarrow{r} ,

\overrightarrow{F} : la résultante des forces appliquées au satellite.

Au voisinage de la terre un objet n'est soumis qu'à une seule force, l'attraction terrestre supposée centrale, qui s'écrit :

$$\overrightarrow{F} = -\mu \frac{m}{\|\overrightarrow{r}\|^3} \overrightarrow{r} \quad (1)$$

Cette équation montre que l'on a, dans ce cas, une force centrale, colinéaire au rayon vecteur, que le mouvement est plan et décrit une conique de foyer le centre de la terre dont l'équation en coordonnées cylindriques est :

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{\|\vec{c}\|^2} (1 + e \cos(\theta - \theta_0))$$

\vec{c} : moment cinétique ($= \vec{r} \wedge \vec{r}'$)

e : excentricité

μ : la constante de gravitation universelle ($= 39800.64 km^3/s^2$)

θ_0 : angle pris au périégée (ie quand la trajectoire passe au plus près du centre de la terre)

La situation précédente représente le cas d'orbites Képlériennes, c'est à dire que la seule force agissant sur le satellite est une force centrale due à l'attraction terrestre. En réalité, bien d'autres forces viennent perturber le mouvement du satellite ne serait-ce que l'attraction terrestre qui, en fait, n'est pas centrale.

2.1 Notations

Considérons un satellite en orbite autour de la terre, sa trajectoire est définie dans le repère géocentrique lié à la terre. On peut définir la position du satellite sur l'orbite de deux façons : d'une part par ses coordonnées cartésiennes (ou rectangulaires), $x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$, les coordonnées du vecteur position et du vecteur vitesse dans ce repère et d'autre part par ses coordonnées képlériennes, $a, e, i, \omega, \Omega, M$ où :

- a est le demi-grand axe de l'ellipse,
- e est l'excentricité,
- i est l'inclinaison de l'orbite par rapport à l'équateur,
- Ω est l'ascension droite du nœud ascendant, c'est à dire l'angle entre l'axe X et la ligne d'intersection du plan de l'orbite avec l'équateur,
- ω est l'argument du périégée, c'est à dire l'angle dans le plan de l'orbite entre le nœud ascendant et le périégée,
- M est l'anomalie moyenne.

On peut aussi utiliser l'anomalie excentrique E à la place de l'anomalie moyenne M . Ces deux variables sont liées par l'équation de Képler :

$$M = E - e \sin E \quad (2)$$

Généralement c'est M qui est donné et c'est E qui est utilisé pour les calculs, on aura donc à résoudre l'équation de Képler (2).

Dans le cas où la force qui agit sur le satellite est définie par (1), l'anomalie moyenne M permet de définir simplement le mouvement (qui est alors Képlérien) au cours du temps par :

$$M = M_0 + n(t - t_0) \quad (3)$$

où n est le moyen mouvement égal à $\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$.

Les deux jeux de coordonnées seront utilisés, les coordonnées rectangulaires pour le calcul numérique de la trajectoire et les coordonnées képlériennes pour le calcul analytique de la trajectoire. On peut passer des coordonnées rectangulaires aux coordonnées képlériennes et inversement (les matrices de passage sont données dans ([19])).

2.2 Les forces perturbatrices

Plusieurs forces perturbatrices peuvent être prises en compte dans le calcul de la trajectoire du satellite. Seule la perturbation due au potentiel terrestre sera détaillée ci-dessous et c'est, en fait la plus importante. Les autres forces que nous ferons intervenir sont :

- Le potentiel de la lune

- Le potentiel du soleil
- La pression de radiation solaire
- Le frottement atmosphérique

Dans ces différentes forces, seul le frottement atmosphérique fait intervenir la vitesse.

2.2.1 Le potentiel terrestre

La Terre n'est ni sphérique, ni uniformément dense. Il en résulte que le potentiel terrestre ne se limite plus au terme en $1/r$ qui, par dérivation, donnait une force en $1/r^2$.

On peut décrire ce potentiel sous forme d'harmoniques sphériques :

$$u = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{r_{eq}}{r} \right)^k J_k P_k \sin \varphi + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=2}^n \left(\frac{r_{eq}}{r} \right)^n (C_{n,m} \cos(m\lambda) + S_{n,m} \sin(m\lambda)) P_{n,m} \sin \varphi \right\} \quad (4)$$

avec

r_{eq}	le rayon équatorial,
J_k	l'harmonique zonal d'ordre k (coefficients donnés, $J_1 = 0$),
n, m	l'ordre et le degré des tesseraux
$C_{n,m}$ et $S_{n,m}$	les harmoniques tesseraux,
P_n	le polynôme de Legendre de degré n,
$P_{n,m}$	la fonction de Legendre associée,
φ, λ, r	respectivement la latitude, la longitude et le rayon vecteur.

- Lorsque l'on parlera de *force képlérienne*, il s'agira de la force qui dérive du potentiel $\frac{\mu}{r}$,
- lorsque l'on parlera de *force en J_{nz}* (pour la force en J_2 on parlera de *force terrestre simplifiée*), il s'agira de la force qui dérive du potentiel $\frac{\mu}{r} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{nz} \left(\frac{r_{eq}}{r} \right)^k J_k P_k \sin(\varphi) \right\}$ (on appellera nz le degré maximal des zonaux),
- si l'on parle de *force terrestre complète*, il s'agira de la force qui dérive du potentiel u défini en (4).

Le premier harmonique zonal (J_2) est de l'ordre de 10^{-3} par rapport au terme central en μ/r tandis que les suivants ainsi que les harmoniques tesseraux sont d'un ordre inférieur ou égal à 10^{-6} . Il est donc nécessaire de prendre le terme en J_2 pour avoir un calcul assez précis de la trajectoire, alors que les autres termes pourront, dans un premier temps, être négligés.

2.2.2 Comparaison des forces perturbatrices

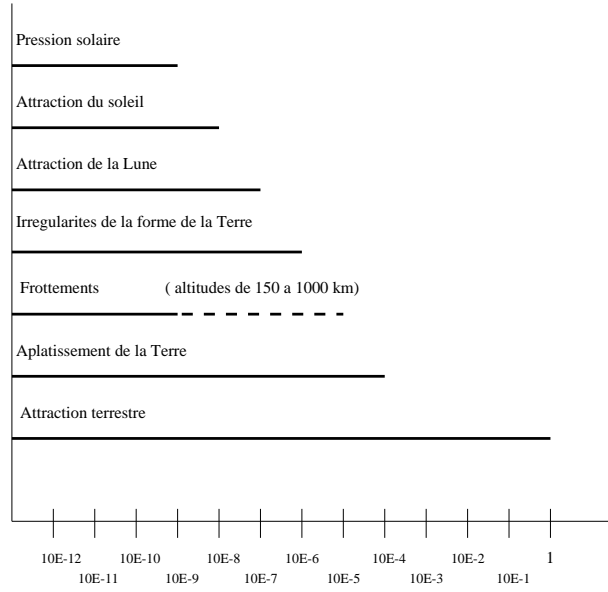
Dans [8], G.Alby donne les ordres de grandeur de ces différentes forces en comparaison avec le terme central du potentiel terrestre qui est en $\frac{\mu}{r}$ (Fig 1).

3 Intégration numérique : méthode de COWELL

Soit $y = (x_1, x_2, x_3)$, la position du satellite et $y' = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ sa vitesse. Nous avons vu que le calcul de la trajectoire d'un satellite consiste à résoudre un système différentiel du second ordre qui peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} y'' = f(t, y(t), y'(t)) \\ y(T_0) = y_0 \\ y'(T_0) = y'_0 \end{cases} \quad t \in [T_0, T] \quad (5)$$

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre de tels problèmes, nous présentons, ici, celle utilisée par le CNES (Centre National des Etudes Spatiales) et qui est la méthode de COWELL ([19], [7], [9]).

FIG. 1 – *intensité des forces perturbatrices*

3.1 Présentation de la méthode de COWELL

La méthode de COWELL est une méthode très utilisée pour les calculs de trajectoires de satellites en orbites, basée sur une approximation de type Adams-Moulton. Cette méthode résout directement des systèmes différentiels du second ordre, c'est une méthode à pas fixes. Nous allons maintenant expliquer son schéma.

Soit h le pas d'intégration, on a :

$$y(t+h) - y(t) = \int_t^{t+h} y'(s) ds$$

on intègre par partie tel que :

$$\begin{aligned} y' &\longrightarrow y'' \\ 1 &\longrightarrow s \end{aligned}$$

on obtient :

$$y(t+h) - 2y(t) + y(t-h) = \int_t^{t+h} (t+h-s)(f(s) + f(2t-s)) ds$$

soit la notation :

$$\begin{cases} t+h = t_{n+1} \\ t = t_n \\ t-h = t_{n-1} \end{cases}$$

et le changement de la variable s en la variable i : $t_{n+1} + hi = s$ on a alors :

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = \int_{-1}^0 -ih^2(f(t_{n+1} + hi) + f(t_{n-1} - (2+i)h)) di$$

Le principe consiste, alors, à faire une interpolation polynômiale de f . On se donne un entier k et on interpole f aux points $t_{n-k}, t_{n-k+1}, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+k-1}, t_{n+k}$. On obtient une équation de la forme :

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{i=-k}^k b_{i,k} f_{n-i}$$

Le polynôme d'interpolation est donc de degré $2k$.

Nous avons obtenu une équation pour la position mais de façon analogue, on a une formule pour la vitesse, qui peut s'écrire sous la forme :

$$y'_n - y'_{n-1} = h \sum_{i=-k}^k a_{i,k} f_{n-i}$$

on obtient donc un schéma qui s'écrit :

$$\begin{cases} y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{i=-k}^k b_{i,k} f_{n-i} \\ y'_n - y'_{n-1} = h \sum_{i=-k}^k a_{i,k} f_{n-i} \end{cases}$$

On résout ce schéma implicite par une approche de type prédiction-correction:

On suppose que l'on connaît y et y' aux instants t_{n-k}, \dots, t_n , on connaît également une première estimation de y et y' en $t_{n+1}, t_{n+2}, \dots, t_{n+k-1}$. Ensuite, grâce au polynôme d'interpolation en $t_{n-k}, t_{n-k+1}, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+k-1}$, on obtient un schéma explicite qui nous donne une première estimation de y et y' en t_{n+k} . On peut alors calculer le polynôme d'interpolation en $t_{n-k+1}, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+k-1}, t_{n+k}$ qui nous permet d'avoir un schéma de correction afin d'obtenir y et y' à t_{n+1} . L'expression des formules précédentes peut être sensible aux erreurs d'arrondis car elle fait intervenir des soustractions de valeurs voisines. Pour y remédier, on préfère transformer les formules de manière à ne faire intervenir que y et y' à l'instant où l'on veut les calculer ainsi que les différences successives de f . La forme sommée de COWELL nous donne un nouveau schéma, elle utilise les différences divisées données par :

$$\begin{aligned} f_{n+\frac{1}{2}}^1 &= f_{n+1} - f_n & f_{n+\frac{1}{2}}^i &= f_{n+1}^{i-1} - f_n^{i-1} & \text{pour } i \text{ impair} \\ f_n^2 &= f_{n+\frac{1}{2}}^1 - f_{n-\frac{1}{2}}^1 & f_n^i &= f_{n+\frac{1}{2}}^{i-1} - f_{n-\frac{1}{2}}^{i-1} & \text{pour } i \text{ pair} \\ f_{n+\frac{1}{2}}^{-1} &= f_{n-\frac{1}{2}}^{-1} + f_n & & \text{avec un des } f_{n\pm\frac{1}{2}}^{-1} \text{ arbitraire} \\ f_{n+1}^{-2} &= f_n^{-2} + f_{n+\frac{1}{2}}^{-1} & & \text{avec un des } f_{n(+1)}^{-2} \text{ arbitraire} \end{aligned}$$

On obtient le schéma suivant :

$$y_{n+p} = h^2 (f_{n+p}^{-2} - \sum_{i=-k}^k A_i(p) f_{n+i}) \quad (6)$$

$$y'_{n+p} = h (f_{n+p-\frac{1}{2}}^{-1} - \sum_{i=-k}^k B_i(p) f_{n+i}) \quad (7)$$

$$y''_{n+p} = f(t_{n+p}, y_{n+p}, y'_{n+p}) \quad (8)$$

où $A_i(p)$ et $B_i(p)$ sont des polynômes de degré $2k$.

On ajoute au schéma deux équations qui représentent les différences :

$$y''_{n+p} = f_{n+p+\frac{1}{2}}^{-1} - f_{n+p-\frac{1}{2}}^{-1} \quad (9)$$

$$f_{n+p-\frac{1}{2}}^{-1} = f_{n+p}^{-2} - f_{n+p-1}^{-2} \quad (10)$$

La méthode est d'ordre $m = 2k + 2$ pour y ([7]).

3.2 L'algorithme mis en œuvre

Les étapes de l'algorithme sont données dans ([9]) et sont les suivantes :

Soit m l'ordre de la méthode :

on suppose que l'on connaît y et y' au temps t_{n-1} et y'' de $t_{n-\frac{m}{2}}$ à $t_{n+\frac{m}{2}-2}$.

• **étape 1**

grâce à (6) et (7), avec $p = 0$ et n remplacé par $n - 1$, on peut calculer la valeur de f_{n-1}^{-2} et $f_{n-\frac{3}{2}}^{-1}$.

• **étape 2**

à partir de (9) et (10), on déduit les valeurs de f_i^{-2} pour $i = n, n + 1, \dots, n + \frac{m}{2} - 1$ et les valeurs de f_j^{-1} pour $j = n - \frac{1}{2}, n - \frac{1}{2} + 1, \dots, n + \frac{m}{2} - \frac{3}{2}$.

• **étape 3**

en utilisant (6) et (7) pour $p = \frac{m}{2}$ et en $n - 1$, on obtient une prédiction de $y_{n-1+\frac{m}{2}}$ et de $y'_{n-1+\frac{m}{2}}$.

• **étape 4**

à l'aide de (8), on a une prédiction de $y''_{n-1+\frac{m}{2}}$.

• **étape 5**

on utilise, alors le schéma au temps t_n . Les équations (6) et (7) prises en t_n et pour $p = 0, \frac{m}{2} - 1$ nous donne une correction de y_i pour $i = n, n + 1, \dots, n + \frac{m}{2} - 1$ et de y'_j pour $j = n, n + 1, \dots, n + \frac{m}{2} - 1$.

• **étape 6**

(8) permet de corriger y''_l pour $l = n, n + 1, \dots, n + \frac{m}{2} - 1$. Pour cela, on calcule le second membre f avec comme seule perturbation celle due au terme en J_2 et cela quelles que soient les forces que l'on veut faire intervenir, sauf au temps t_n où la force complète sera calculée.

• **étape 7**

on recommence l'étape 5 jusqu'à convergence, c'est à dire jusqu'à ce que l'on ait :

$$\frac{|y^{[j+1]} - y^{[j]}|}{|y^{[j]}|} \leq TOL$$

où TOL est la tolérance voulue par l'utilisateur et j est le compteur des itérations.

• **étape 8**

La convergence atteinte, on retourne à l'étape 1 en progressant d'un pas, c'est à dire au temps t_n .

La figure (2) illustre cet algorithme dans le cas où l'ordre m est 8 et donc k vaut 3.

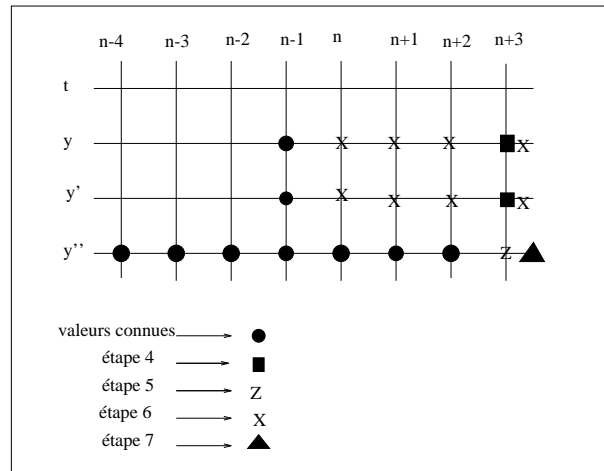


FIG. 2 – *algorithme de COWELL*

3.3 Modèle des temps d'exécution

On cherche, maintenant, à établir une formule permettant de calculer le temps d'exécution de la méthode de Cowell, afin de faciliter sa comparaison avec une autre méthode. Les calculs dépendent des forces perturbatrices prises en compte. Pour notre problème nous cherchons à établir une formule ne dépendant que de la force dérivant du potentiel terrestre. A chaque pas, on effectue une intégration dont le temps d'exécution reste le même sur tout l'intervalle $[T_0, T]$. Cette intégration fait appel au calcul de la force terrestre simplifiée et au calcul de la force terrestre correspondant au nombre de perturbations prises en compte (voir l'étape 6 de l'algorithme de Cowell). On peut, donc, écrire le temps d'exécution T_c du calcul de la trajectoire d'un satellite par la méthode de COWELL par la formule suivante :

$$T_c = \beta + \frac{T - T_0}{h}(\alpha_0 t_0 + \alpha_1 t_1)$$

avec :

- t_0 : temps du calcul de la force terrestre simplifiée
- t_1 : temps du calcul de la force terrestre complète
(dépend du nombre de perturbations prises en compte)
- $T - T_0$: durée d'intégration
- h : pas

$\frac{T-T_0}{h}$ correspond au nombre de pas et β correspond au temps d'initialisation. Dans ce modèle on ne considère que les forces perturbatrices dérivant du potentiel terrestre. Il reste à déterminer le nombre d'appels à la fonction calculant la force à chaque pas et pour chaque type (simplifiée et complète).

En faisant varier les différents paramètres et après de nombreuses exécutions, nous avons pu estimer les constantes du modèle :

- β : 0.3524 sec
- α_0 : 71.52
- α_1 : 1.02

On peut vérifier la validité du modèle en le comparant avec les temps réels d'exécutions. On se place dans le cas où $t_0 = 1.6 \times 10^{-5} \text{sec}$ avec $h = 30 \text{sec}$. On obtient le graphe fig 3 :

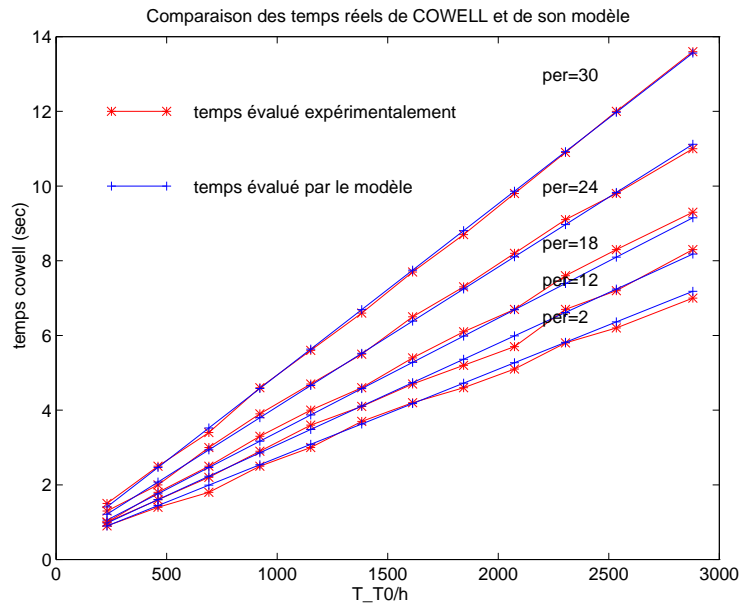


FIG. 3 – *Modèle de temps de COWELL*

Remarque : “per” représente le nombre de termes de la série du potentiel terrestre pris en compte (force terrestre complète) .

4 Parallélisation à travers le temps

4.1 Méthode générale

On désire résoudre le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) \\ y(T_0) = y_0 \quad t \in [T_0, T] \end{cases} \quad (11)$$

sous les hypothèses :

- F est lipschitzienne
- F est continûment différentiable

On veut construire une méthode qui soit parallèle à travers le temps. Pour cela, suivant [15], on partitionne l'intervalle $[T_0, T]$ en N sous intervalles (avec $T_N = T$) sur lesquels on pourra mener des intégrations indépendantes. Considérons le graphe de la figure 4 qui représente les sous intervalles d'intégration:

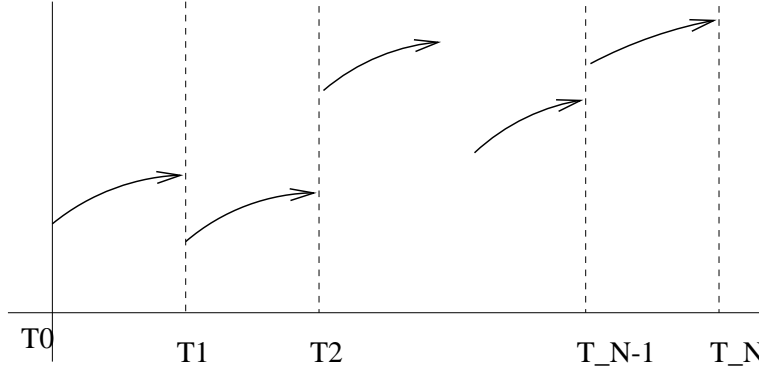


FIG. 4 – Méthode d'intégration par découpage de l'intervalle de temps

On note y_0, y_1, \dots, y_{N-1} les conditions initiales aux temps T_0, T_1, \dots, T_{N-1} et φ la fonction d'intégration. Alors après N intégrations en parallèle on obtient des solutions à la fin de chaque sous intervalle notées $\varphi(y_0), \varphi(y_1), \varphi(y_2), \dots, \varphi(y_{N-1})$ telles que :

$$\varphi(y_i) = y(T_{i+1}, T_i, y_i) \quad i = 0, N-1$$

C'est la solution au temps T_{i+1} et de condition initiale :

$$y(T_i) = y_i \quad i = 0, N-1$$

Soit Φ la fonction telle que

$$\Phi : Y = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})^T \longrightarrow \Phi(Y) = (y_0, \varphi(y_0), \dots, \varphi(y_{N-2}))^T$$

Alors on est amené à résoudre

$$\Phi(Y) = Y \quad (12)$$

ce qui peut s'écrire $Y - \Phi(Y) = 0$. On utilise la méthode de Newton pour résoudre cette équation. L'itération de Newton s'écrit :

$$(I - J_\Phi)(Y^{[k+1]} - Y^{[k]}) = -Y^{[k]} + \Phi(Y^{[k]})$$

avec J_Φ le jacobien de Φ défini tel que :

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ J_{\varphi(y_0)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\varphi(y_1)} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_{\varphi(y_{N-2})} & 0 \end{pmatrix}$$

L'itération de Newton devient :
pour $i=1, N-1$

$$y_i^{[k+1]} - y_i^{[k]} = -y_i^{[k]} + \varphi(y_{i-1}^{[k]}) + J_{\varphi(y_{i-1}^{[k]})}(y_{i-1}^{[k+1]} - y_{i-1}^{[k]}) \quad (13)$$

Avant d'appliquer l'itération (13), trois éléments sont à déterminer :

- La condition initiale $Y^{[0]} = (y_0, y_1^{[0]}, \dots, y_{N-1}^{[0]})^T$,
- la solution $\varphi(y_{i-1}^{[k]})$ de l'intégration sur $[T_{i-1}, T_i]$,
- et le Jacobien de φ au point y_i , $J_{\varphi(y_i^{[k]})}$.

Dans le cas où le calcul de φ et J_φ sont exacts, le théorème suivant permet d'établir la convergence de la méthode.

Théorème 1 *Soit F le second membre de l'équation différentielle, telle que F est continûment différentiable sur $\mathcal{R} = [T_0, T] \times \mathbb{R}^m$ et globalement lipschitzienne sur \mathcal{R} , et que $\frac{\partial F}{\partial y}$ soit également lipschitzienne sur le même domaine \mathcal{R} . Alors Y^* , la solution de l'équation (12) est un point fixe de Φ et l'itération (13) est localement quadratiquement convergente.*

4.2 Application au problème

Nous avons à résoudre le système d'équations différentielles donné en (5). Par un simple changement de variable, on se ramène à un système du premier ordre tel que celui écrit en (11) ([13]). Le vecteur solution est le vecteur $(y, y')^T$ et le théorème 1 est alors valable avec $m = 6$. Dans la suite, on notera y le vecteur $(y, y')^T$. Reprenons maintenant les trois points précédents :

- Pour le calcul de la condition initiale $Y^{[0]}$, on utilisera un modèle analytique qui approche la solution exacte. On aura ainsi une fonction ψ_1 qui approche φ et on définira $y^{[0]}$ par $y_i^{[0]} = \psi_1(y_{i-1}^{[0]})$, $y_0^{[0]} = y_0$. Pour ce calcul, le vecteur y sera exprimé en coordonnées képlériennes.
- Pour les intégrations sur les intervalles $[T_{i-1}, T_i]$, nous utiliserons le schéma numérique de Cowell à l'ordre 8. $\varphi(y_{i-1})$ sera donc le résultat de l'intégration par cette méthode et pour ce calcul, le vecteur y sera exprimé en coordonnées rectangulaires.
- Le Jacobien $J_{\varphi(y_i)}$ sera approché par le Jacobien d'un modèle analytique ψ_2 , de façon à avoir une expression analytique de J_{ψ_2} . En général, on choisira $\psi_2 = \psi_1$.

Remarque 1 : dans la mesure où on approche la fonction φ par un schéma numérique et où on approche le Jacobien J_φ par un Jacobien J_{ψ_2} , l'algorithme utilisé ne vérifie plus le théorème 1. En revanche, il est clair qu'après N (nombre d'intervalles de temps) itérations, la méthode converge.

Remarque 2 : la méthode de Newton convergera d'autant plus vite que $y^{[0]}$ est proche de la solution, donc que ψ_1 est proche de φ .

Voici l'algorithme mis en oeuvre :

ALGORITHM 1: Newton

N est le nombre de sous-intervalles de temps ;
TOL est la tolérance fixée par l'utilisateur ;
 $k:=0$;
 $\delta_i := 1.D0$ ($i=0, N-1$) ;
tant que $k \leq N$ **faire**
 Intégrations
 pour $i = k, N-1$ **faire**
 si $k = 0$ **alors**
 Calcul de $y_i^{[0]}$ l'approximation de la donnée initiale ;

```

fin si
  Calcul de  $\varphi(y_i^{[k]})$  par la méthode de Cowell ;
fin pour
si  $|sup_{(i=k, N-1)}(\delta_i)| < TOL$  alors
  STOP ' convergence en k itérations' ;
fin si
  Corrections : Itération de Newton
pour i = k+1, N-1 faire
  Calcul de  $J_{\varphi(y_{i-1}^{[k]})}$  (ou de son approximation) ;
   $y_i^{[k+1]} := \varphi(y_{i-1}^{[k]}) + J_{\varphi(y_{i-1}^{[k]})}(y_{i-1}^{[k+1]} - y_{i-1}^{[k]})$  ;
   $\delta_i := y_i^{[k+1]} - y_i^{[k]}$  ;
fin pour
k:=k+1 ;
fin tant que

```

Après chaque itération, on abandonne au moins un intervalle puisque la donnée initiale pour l'intégration sur cet intervalle est exacte. Donc on a convergence en au plus N itérations. Pour l'étude de cet algorithme, on n'utilisera pas le test de convergence, mais on se fixera un nombre d'itérations maximum. Nous allons étudier cet algorithme avec deux types de modèles analytiques :

1. le modèle Képlérien décrivant une trajectoire soumise à la *force képlérienne*,
2. un modèle approché en J_2 décrivant une trajectoire soumise à la *force simplifiée* .

4.2.1 Approximation Képlérienne

Dans le cas d'une force képlérienne, la trajectoire est donnée par l'équation (3), on peut, alors, calculer explicitement la fonction φ et son Jacobien J_φ . En effet la trajectoire se calcule à l'aide des coordonnées képlériennes par la fonction :

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } y_i &= (a, e, i, \omega, \Omega, M) \quad \text{la condition initiale au temps } T_i \\
 \text{alors } \varphi(y_i) &= y(T_{i+1}, T_i, y_i) = (a, e, i, \omega, \Omega, M + n(T_{i+1} - T_i))
 \end{aligned} \tag{14}$$

avec

n : le mouvement moyen ($= \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$) où μ est la constante de gravitation universelle).

Le Jacobien s'écrit donc :

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad x = -\frac{3}{2} \frac{(t - t_0)\mu}{na^4} = -\frac{3}{2} (t - t_0) a^{-5/2} \sqrt{\mu} \tag{15}$$

Ce modèle sera utilisé dans tous les cas où la force d'attraction terrestre sera la force képlérienne. Par exemple si l'on ajoute une force perturbatrice due au frottement atmosphérique, nous utiliserons la fonction φ définie en (14) et le Jacobien correspondant (15) qui seront, alors, des approximations ψ_1 et J_{ψ_2} du modèle exact et de son Jacobien.

4.2.2 Approximation en J_2

Par intégration itérative des équations de Lagrange, on peut calculer un modèle analytique du problème où les seules forces perturbatrices sont d'origine terrestre et réduites au terme en J_2 du potentiel (modèle de Kozai [19]). Soit φ la fonction qui exprime les coordonnées en fonction du temps. Elle est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } y_i &= (a, e, i, \omega, \Omega, M) \quad \text{la condition initiale au temps } T_i \\
 \text{alors } \varphi(y_i) &= y(T_{i+1}, t_i, y_i) = (a, e, i, \omega + \Delta\omega, \Omega + \Delta\Omega, M + \Delta M)
 \end{aligned} \tag{16}$$

avec

$$\begin{aligned}\Delta\omega &= \frac{3}{4} \left(\frac{r_{eq}}{a}\right)^2 \frac{J_2 n}{(1-e^2)^2} (4 - 5 \sin^2 i)(t - t_0) \\ \Delta\Omega &= -\frac{3}{2} \left(\frac{r_{eq}}{a}\right)^2 \frac{J_2 n}{(1-e^2)^2} \cos i(t - t_0) \\ \Delta M &= \left[n + \frac{3}{4} \left(\frac{r_{eq}}{a}\right)^2 \frac{J_2 n}{(1-e^2)^{-3/2}} (2 - 3 \sin^2 i) \right] (t - t_0)\end{aligned}$$

où n est le mouvement moyen, r_{eq} est le rayon équatorial.

On peut calculer analytiquement le jacobien J_φ correspondant à la trajectoire φ définie par (16). On obtient les formules suivantes :

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 1 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 0 & 1 & 0 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

avec

$$\begin{aligned}x_1 &= -\frac{21}{8} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{J_2 n}{a(1-e^2)^2} (4 - 5 \sin^2 i)(t - t_0) \\ x_2 &= 3 \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{J_2 n}{(1-e^2)^3} (4 - 5 \sin^2 i)e(t - t_0) \\ x_3 &= -\frac{15}{2} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{J_2 n}{(1-e^2)^2} \sin i \cos i(t - t_0) \\ y_1 &= \frac{21}{4} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{J_2 n}{a(1-e^2)^2} \cos i(t - t_0) \\ y_2 &= -6 \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{J_2 n}{(1-e^2)^3} e \cos i(t - t_0) \\ y_3 &= \frac{3}{2} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{J_2 n}{(1-e^2)^2} \sin i(t - t_0) \\ z_1 &= \left[-\frac{3}{2} \frac{n}{a} - \frac{21}{8} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{J_2 n}{a(1-e^2)^{3/2}} (2 - 3 \sin^2 i) \right] (t - t_0) \\ z_2 &= \frac{9}{4} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{J_2 n}{(1-e^2)^{5/2}} (2 - 3 \sin^2 i)e(t - t_0) \\ z_3 &= -\frac{9}{2} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{J_2 n}{(1-e^2)^{3/2}} \sin i \cos i(t - t_0)\end{aligned}$$

Ce modèle sera utilisé pour toutes les trajectoires dont la force perturbatrice d'origine terrestre sera due au potentiel réduit au terme en J_2 . Les fonctions φ et J_φ définies par (16) et (17) seront les approximations ψ_1 et J_{ψ_2} .

4.2.3 Modèle des temps d'exécution en séquentiel

De la même façon que pour la méthode de Cowell, on cherche à établir une formule exprimant le temps d'exécution. D'après l'algorithme de Newton séquentiel donné en (1), le temps d'exécution se décompose en trois parties: l'initialisation, l'intégration, la correction. Le temps d'intégration dépend du nombre de pas effectués et le temps de correction du nombre d'intervalles pris en compte pour la méthode. On suppose, pour simplifier qu'un seul intervalle converge à chaque itération. On suppose également qu'on subdivise tout l'intervalle $[t_0, T]$. On peut, donc, écrire que le temps d'exécution sera de la forme :

$$T_{seq} = \alpha + t \left(\frac{T - T_0}{h} \right) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{niter} (N - k) + \beta \sum_{k=0}^{niter-1} (N - k) \quad (18)$$

où

$T - T_0$ est la durée de l'éphéméride (en secondes),

h est le pas (ici $h=60$ sec),

$\frac{T-T_0}{h}$ est le nombre de pas,

N est le nombre de découpages de l'intervalle de temps,
 $niter$ est le nombre d'itérations,
 α est le temps d'initialisation,
 t est le temps d'intégration pour un pas (en secondes),
 β est le temps d'une correction (en secondes).

La somme $\sum_{k=0}^{niter} (N - k)$ représente le nombre d'intervalles que l'on a intégrés, $(T - T_0/h) \frac{1}{N}$ représente le nombre de pas sur un intervalle. Après de nombreuses exécutions, on a pu estimer les paramètres :

$\alpha = 0.068$ secondes

$\beta = 0.0015$ secondes

On vérifie la validité du modèle en traçant les temps théoriques obtenus par l'équation (18) et ceux obtenus expérimentalement en fonction du nombre de pas. Par exemple pour un problème en J_2 , le temps d'intégration vaut $t = 0.344 \times 10^{-3}$ avec un pas $h = 60$ secondes (il correspond au temps $\alpha_0 t_0 + \alpha_1 t_1$ avec $t_1 = t_0$ du modèle de temps de Cowell) et un nombre d'intervalles $N = 8$, on a la figure 5.

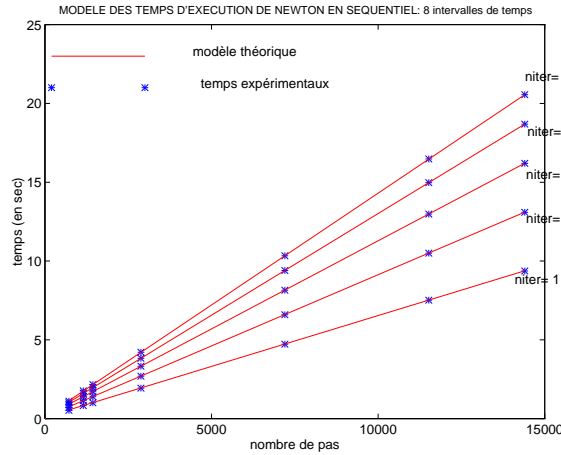


FIG. 5 –

4.3 Mise en œuvre parallèle

La parallélisation s'effectuera sur une machine de type MIMD à mémoire partagée comportant un petit nombre de processeurs. On utilisera une programmation du type SPMD, avec une expression du parallélisme à l'aide de directives parallèles au niveau des boucles. La méthode consiste à mener les intégrations de Cowell de façon indépendante sur chaque intervalle $[T_{i-1}, T_i]$. L'analyse des dépendances de données dans l'algorithme séquentiel 1 montre clairement que la boucle d'intégration ($i=k, N-1$) est parallèle. Par contre la boucle de correction ($i=k+1, N-1$) est séquentielle. Dans l'algorithme 1 nous avons, donc, un parallélisme immédiat au niveau de la première boucle sur i . On a plusieurs solutions possibles pour répartir les $N - k$ itérations de la boucle i aux processeurs. Ici, on choisit une répartition par blocs des $N/nproc$ premières itérations sur le premier processeur, des $N/nproc$ itérations suivantes sur le deuxième processeur et ainsi de suite ($nproc$ étant le nombre de processeurs). Sur une machine Power Challenge SGI, cela se traduit dans la directive de parallélisation par la variable **MP_SCHEDTYPE** qui sera du type **SIMPLE**. L'algorithme parallélisé est, alors, le suivant :

ALGORITHM 2: Newton en parallèle

N est le nombre de découpage de l'intervalle de temps ;

TOL est la tolérance fixée par l'utilisateur ;

$k:=0$;

$\delta_i : = 1.D0$ ($i=0, N-1$) ;

tant que $k \leq N$ **faire**

Intégrations


```

C  $DOACROSS LOCAL(i,  $y_i^{[k]}$ ),MP_ SCHEDTYPE=SIMPLE
  pour i = k, N-1 faire
    si k = 0 alors
      Calcul de  $y_i^{[0]}$  la donnée initiale ;
    fin si
      Calcul de  $\varphi(y_i^{[k]})$  par la méthode de Cowell ;
    fin pour
    si  $|sup_{(i=k, N-1)}(\delta_i)| < TOL$  alors
      STOP ' convergence en k itérations' ;
    fin si
      Corrections : Itération de Newton
    pour i = k+1, N-1 faire
      Calcul de  $J_{\varphi(y_{i-1}^{[k]})}$  (ou de son approximation) ;
       $y_i^{[k+1]} : = \varphi(y_{i-1}^{[k]}) + J_{\varphi(y_{i-1}^{[k]})}(y_{i-1}^{[k+1]} - y_{i-1}^{[k]})$  ;
       $\delta_i : = y_i^{[k+1]} - y_i^{[k]}$  ;
    fin pour
    k:=k+1 ;
  fin tant que

```

DOACROSS est la directive de parallélisation d'une boucle, **LOCAL** est l'ensemble des variables déclarées localement pour chaque processeur les autres étant partagées par défaut.

Cette parallélisation qui consiste à répartir les calculs de tout l'intervalle de temps sur les différents processeurs est celle qui apparait de façon naturelle dans l'algorithme séquentiel 1. Nous nous sommes attachés à cette première méthode de parallélisation dans le but d'avoir une idée du comportement et des potentialités de la méthode de Newton exécutée en parallèle. Une parallélisation plus efficace consisterait à n'intégrer que sur une fenêtre de *nproc* sous-intervalles et à faire glisser la fenêtre en fonction de la convergence à chaque itération.

4.3.1 Modèle des temps d'exécution en parallèle

De la formule de temps (18) et de l'algorithme 2, on peut en déduire un modèle de temps d'exécution en parallèle :

$$T_{par} = \alpha + t \left(\frac{T - T_0}{h} \right) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{niter} \left[\frac{N - k}{nproc} \right] + \beta \sum_{k=0}^{niter-1} (N - k) \quad (19)$$

les variables ont la même signification qu'au paragraphe précédent et :

nproc est le nombre de processeurs,

$[x]$ est le ceiling de *x* (c'est à dire l'entier supérieur le plus proche vers $+\infty$),

Les constantes ont la même valeur.

On vérifie le modèle en traçant les temps théoriques (donnés par (19)) et expérimentaux en fonction du nombre de processeurs, on obtient, par exemple pour une trajectoire en J_2 sur $T - T_0 = 8$ jours, $h = 60$ secondes et $N = 8$ la figure 6.

On obtient un modèle relativement précis qui nous permet de constater que dans le cas où l'on prend 8 processeurs, nous avons un speed-up compris entre 4 et 5 pour *niter* = 1, ..., 5 et donc une efficacité de 50% .

5 Résultats numériques

Dans tous les calculs l'éphéméride sera définie par :

- Les données T_0 et $(y_0, y'_0)^T$
 - date (T_0) : 1200 jours,
 - demi grand axe (*a*) : 7300 km,
 - inclinaison (*i*) : 98 deg,
 - argument du périégée (ω) : 10 deg,
 - ascension droite (Ω) : 45 deg,
 - anomalie moyenne (*M*) : 123 deg.

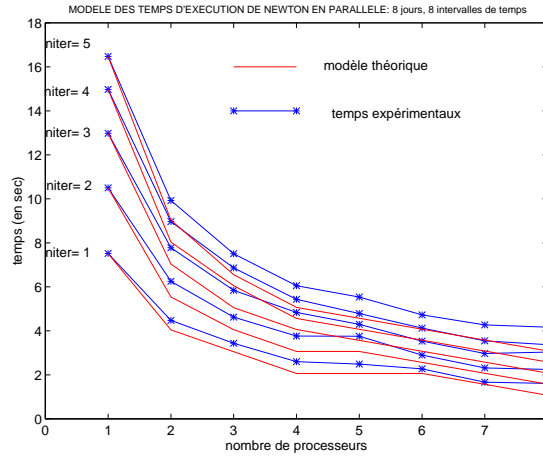


FIG. 6 –

- Le choix du modèle
degré des tesseraux : 0,
ordre des tesseraux : 0.
- Le schéma numérique
pas d'intégration (h) : 60 sec.

Les paramètres qui varieront sont :

- e : l'excentricité,
- d=T - T₀ : la durée de l'éphéméride en jours,
- nz : degré maximal des zonaux,
- niter : le nombre d'itérations de Newton,
- N : le nombre de découpages de l'intervalle de temps,

et la prise en compte ou non du frottement atmosphérique, de la pression de radiation solaire et des potentiels luni-solaire.

Ici $(y_0, y'_0)^T$ est donné en coordonnées képlérienne: $(y_0, y'_0) = (a, e, i, \omega, \Omega, M)$.

5.1 Définition des erreurs

Les trajectoires calculées par la méthode de Newton vont être comparées à celles calculées par la méthode classique de Cowell. Pour cela, on calcule les écarts radial, normal et tangentiel pour chaque point calculé lors de l'intégration.

Soit y_i la solution obtenue par la méthode de Cowell classique au temps T_i (c'est la solution de référence) et y'_i le vecteur vitesse lui correspondant. On associe à y_i trois vecteurs avec lequel il formera un repère. Le premier est colinéaire à y'_i (c'est le vecteur tangentiel), le second est orthogonal à y'_i et est dans le plan de l'ellipse (c'est le vecteur radial), le troisième est orthogonal aux deux précédents (c'est le vecteur normal). Le schéma (Fig 7) décrit ces trois vecteurs.

Soit \hat{y}_i la solution obtenue par la méthode de newton au temps T_i , alors ses coordonnées dans le repère défini précédemment définissent les erreurs relatives tangentielle, radiale et normale de la méthode de Newton par rapport à celle de Cowell classique. On comparera les maximum de ces erreurs qui sont données par les formules (20).

$$\begin{aligned}
 \text{écart tangentiel:} & \quad \left\langle (\hat{y}_i - y_i) \left| \frac{y'_i}{\|y'_i\|} \right. \right\rangle \\
 \text{écart normal:} & \quad \left\langle ((\hat{y}_i - y_i) \left| \frac{y_i}{\|y_i\|} \wedge \frac{y'_i}{\|y'_i\|} \right. \right\rangle \\
 \text{écart radial:} & \quad \left\langle ((\hat{y}_i - y_i) \left| \left(\frac{y_i}{\|y_i\|} \wedge \frac{y'_i}{\|y'_i\|} \right) \wedge \frac{y'_i}{\|y'_i\|} \right. \right\rangle
 \end{aligned} \tag{20}$$

avec

y_i est la solution de référence (calculée avec Cowell classique) au temps t_i ,

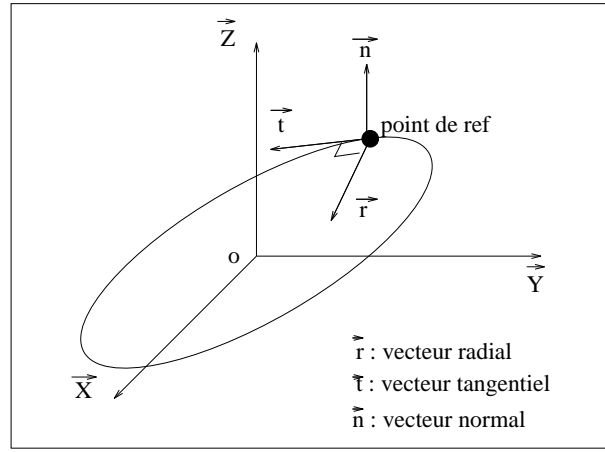


FIG. 7 –

\hat{y}_i est la solution calculée par Newton au temps t_i ,
 y'_i est le vecteur vitesse correspondant à y_i ,
 \hat{y}'_i est le vecteur vitesse correspondant à \hat{y}_i ,
 $\langle . | . \rangle$ est le produit scalaire Euclidien,
 $. \wedge .$ est le produit vectoriel.

5.2 Convergence quadratique

Le Jacobien étant connu, nous avons pu vérifier la convergence de la méthode de Newton dans le cas d'une trajectoire képlérienne. Pour cela, on intègre non plus avec $y_0^{[0]}$ mais avec $z_0^{[0]} = y_0^{[0]} + \delta$ où δ est une petite perturbation. On applique l'algorithme (1), soient $y_N^{[1]}$ la solution au temps $T_N = T$ obtenue à partir de la condition initiale $y_0^{[0]}$ et $z_N^{[1]}$ la solution au temps $T_N = T$ calculée à partir de la condition initiale $z_0^{[0]}$. On pose :

$$e^{[0]} = \|y_0^{[0]} - z_0^{[0]}\| = \delta$$

Théoriquement, la méthode de Newton converge localement à une vitesse quadratique. Donc l'erreur $e^{[1]}$ après une itération est, a priori, telle que :

$$e^{[1]} = \|y_N^{[1]} - z_N^{[1]}\| \simeq C(e^{[0]})^2 \simeq C\delta^2$$

où C est une constante.

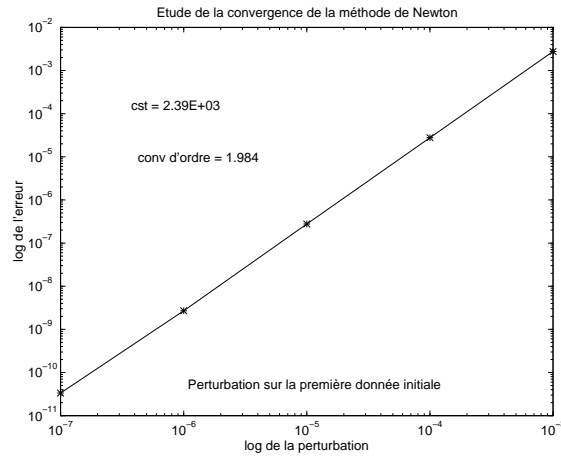
C'est ce que nous vérifions sur le graphique (fig 8).

Nous nous sommes placés dans le cas d'une éphéméride d'une durée de 10 jours avec un partitionnement en 10 sous intervalles (qui sont donc d'une durée de 1 jour chacun). Le graphe (fig 8) représente l'erreur $e^{[1]}$ en fonction de la perturbation δ et à l'aide d'une échelle logarithmique.

On obtient une droite de pente d'environ 2 ce qui confirme la convergence quadratique de la méthode. Cependant, nous avons une constante assez élevée qui indique que la convergence quadratique est bonne dans le cas où l'on prend des conditions initiales voisines de la solution exacte.

5.3 Approximation par Kepler : influence des forces

Pour le calcul d'une trajectoire où le potentiel pris en compte est restreint au terme radial, nous avons un modèle analytique exact défini par l'équation (3). Dans ce cas, nous pouvons étudier l'influence des forces perturbatrices qui ne sont pas d'origine terrestre, sur la convergence de la méthode et sur sa vitesse. On se place dans le cas suivant :

FIG. 8 – *Convergence de la méthode*

degré maximal de zonaux : $nz=0$,
 autres forces : 0 ou 1,
 excentricité : $e=0.0005$,
 durée d'intégration : $T - T_0 = 10$ jours,
 pas d'intégration : $h=60$ secondes,
 découpage de l'intervalle de temps : $N = 10$.

Plusieurs cas (notés abcd) peuvent être envisagés suivant les forces :

le frottement atmosphérique : 0,1 (a),
 La pression solaire : 0,1 (b),
 le potentiel de la lune : 0,1 (c),
 Le potentiel du soleil : 0,1 (d).

Le tableau ci-dessous représente les erreurs de la méthode de Newton en fonction du nombre d'itérations et des différentes perturbations. Ces erreurs sont obtenues en comparant les solutions de Cowell à celles de la méthode de Newton. Les erreurs sont toujours des erreurs relatives. Le Jacobien et la solution initiale $y_0^{[0]}$ de l'itération (13) sont définis par le modèle de Kepler (14).

	erreur tang	erreur rad	erreur norm
1 0 0 0			
0 iter N	5.006D-03	6.602D-06	1.411D-07
1 iter N	4.368D-07	1.159D-09	1.545D-11
2 iter N	4.217D-11	3.502D-13	1.299D-14
0 1 0 0			
0 iter N	1.797D-04	7.744D-05	2.036D-06
1 iter N	1.025D-05	4.489D-06	4.234D-10
2 iter N	2.920D-07	1.447D-07	9.867D-12
3 iter N	7.885D-09	3.630D-09	4.036D-13
4 iter N	1.051D-10	4.807D-11	7.913D-15
5 iter N	5.708D-12	5.548D-13	1.085D-14

0 0 1 0			
0 iter N	2.906D-05	6.450D-07	2.351D-05
1 iter N	4.174D-09	2.980D-10	3.131D-10
2 iter N	6.332D-12	1.189D-13	7.476D-15
0 0 0 1			
0 iter N	8.137D-05	2.738D-07	5.107D-06
1 iter N	2.239D-09	6.638D-11	7.594D-13
2 iter N	1.631D-11	5.995D-14	8.246D-15
1 1 1 1			
0 iter N	5.036D-03	8.163D-05	2.231D-05
1 iter N	1.066D-05	4.504D-06	5.800D-10
2 iter N	3.307D-07	1.434D-07	1.029D-11
3 iter N	7.698D-09	3.608D-09	4.054D-13
4 iter N	1.255D-10	4.724D-11	9.065D-15
5 iter N	2.943D-11	5.762D-13	9.352D-15

On remarque que la convergence de la méthode est la plus lente lorsque l'on fait intervenir la force due à la pression de radiation solaire. Cela est sans doute dû au fait que la pression solaire n'est pas une force continue (elle vaut 1 quand le satellite est au soleil et 0 quand il est à l'ombre). Cette force est approchée par une fonction continue, mais cela ne supprime pas les fortes variations.

5.4 Approximation en J2 : qualité de la solution initiale

Pour un problème où le potentiel terrestre pris en compte est restreint au terme en J_2 , la solution initiale $y_i^{[0]}$ de l'algorithme (1) sera celle calculée par le modèle (16). Pour avoir une idée de la qualité de l'approximation, nous calculons les erreurs commises par le modèle approché (défini en 16). La trajectoire de référence sera celle calculée par la méthode de Cowell classique dans le cas suivant :

$$e = 0.0005,$$

$$nz = 2,$$

On obtient le graphe fig 9.

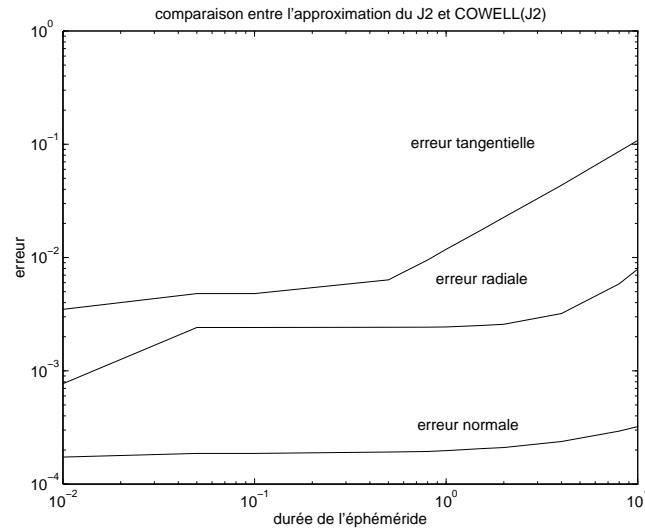


FIG. 9 – qualité de la solution initiale

On remarque que le modèle approché n'est pas très précis par rapport à l'intégration de COWELL puisque nous avons une erreur tangentielle de l'ordre de 6×10^{-3} pour une durée d'éphéméride de 0.8 jour. La convergence risque, alors, de ne plus être quadratique, puisque la méthode est sensible à la précision de la condition initiale par rapport à la solution exacte. (voir 5.2)

5.5 Approximation en J2 : comparaison des Jacobiens

On peut vérifier la qualité du Jacobien en le comparant, d'une part, à celui de Kepler et d'autre part, à celui calculé numériquement à partir d'intégrations de COWELL. On se place dans le cas :

$$e = 0.0005$$

$$d = 1 \text{ jour}$$

$$nz = 2$$

On obtient les matrices suivantes :

Jacobien J2 approché					
0.1000E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.0000E+00	0.1000E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.0000E+00	0.0000E+00	0.1000E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.2347E-04	-.9792E-04	0.7471E-01	0.1000E+01	0.0000E+00	0.0000E+00
-.7235E-05	0.3018E-04	0.1074E+00	0.0000E+00	0.1000E+01	0.0000E+00
-.1795E-01	-.7659E-04	0.4483E-01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.1000E+01
Jacobien de Kepler					
0.1000E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.0000E+00	0.1000E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.0000E+00	0.0000E+00	0.1000E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.1000E+01	0.0000E+00	0.0000E+00
0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.1000E+01	0.0000E+00
-.1797E-01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.1000E+01
Erreur Absolue J2-Kepler					
0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.2347E-04	0.9792E-04	0.7471E-01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.7235E-05	0.3018E-04	0.1074E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.2448E-04	0.7659E-04	0.4483E-01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
Jacobien J2 numérique par COWELL					
0.9175E+00	-.2260E+02	0.2807E+01	-.1151E+02	0.0000E+00	-.1149E+02
0.1401E-04	-.5963E-01	-.5064E-03	0.8140E-03	0.1782E-08	0.1311E-02
0.7876E-06	0.1399E-03	0.1001E+01	0.1112E-03	0.0000E+00	0.1110E-03
-.3316E-01	0.8138E+03	0.4710E+00	0.3132E+01	-.6933E-05	0.3156E+01
-.1020E-04	0.8027E-03	0.1068E+00	0.3552E-03	0.1000E+01	0.3552E-03
0.1527E-01	-.8132E+03	-.3491E+00	-.1816E+01	0.7555E-05	-.1841E+01
Erreur absolue J2 approché-J2 numérique					
0.8252E-01	0.2260E+02	0.2807E+01	0.1151E+02	0.0000E+00	0.1149E+02
0.1401E-04	0.1060E+01	0.5064E-03	0.8140E-03	0.1782E-08	0.1311E-02
0.7876E-06	0.1399E-05	0.5289E-03	0.1112E-03	0.0000E+00	0.1110E-03
0.3318E-01	0.8138E+01	0.3963E+00	0.2132E+01	0.6933E-05	0.3156E+01
0.2963E-05	0.7725E-03	0.5294E-02	0.3552E-03	0.2205E-07	0.3552E-03
0.3322E-01	0.8132E+01	0.3939E+00	0.1816E+01	0.7555E-05	0.2841E+01

Ces résultats nous montrent que le jacobien du modèle approché en J_2 est plus proche du jacobien de Kepler que de celui calculé numériquement à l'aide d'intégrations de COWELL. On a même, pour certaines dérivées, notamment celles par rapport à l'excentricité (deuxième colonne), de très mauvaises approximations. Cela est sans doute dû au fait que l'excentricité e est petite ($e=0.0005$). Nous avons, alors, testé le jacobien pour des trajectoires dont l'excentricité est plus forte ($e=0.05$). On obtient les erreurs absolues suivantes :

Erreur absolue J2 approché-J2 numérique					
0.1807E+00	0.2080E+01	0.3552E+01	0.4536E+01	0.0000E+00	0.2509E+01
0.3473E-04	0.5770E-02	0.3342E-03	0.2344E-02	0.8914E-08	0.3519E-02
0.1487E-05	0.2793E-04	0.5530E-03	0.6020E-04	0.0000E+00	0.4889E-04
0.5504E-03	0.5256E+00	0.1135E-01	0.1427E-03	0.1332E-07	0.6381E-04
0.2596E-05	0.7087E-03	0.2775E-03	0.3454E-03	0.4020E-11	0.3489E-03
0.5686E-03	0.8354E-02	0.1939E-01	0.2889E+00	0.5335E-06	0.2764E+00

On obtient des résultats nettement meilleurs, surtout pour la deuxième colonne du jacobien. Nous allons maintenant voir l'influence de ce jacobien sur la méthode de Newton.

5.6 Approximation en J2 : convergence en fonction de l'excentricité

On applique maintenant la méthode de Newton à une trajectoire soumise aux perturbations dues au terme du potentiel terrestre en J_2 . Les conditions initiales et le Jacobien J_φ sont calculés par le modèle approché J_2 défini en (16).

On se place dans le cas suivant :

durée d'intégration = 0.8 jour
 nz = 2
 nombre de découpages = 10
 excentricité = 0.0005

On obtient les résultats suivant en fonction du nombre d'itérations de Newton :

nb iter	err tang	err rad	err norm
0	9.5064D-03	2.4279D-03	1.9409D-04
1	2.1139D-02	8.4638D-03	9.7266D-06
2	8.6179D-03	4.0164D-03	5.6595D-06
3	5.1937D-03	2.2034D-03	4.1776D-06
4	9.3484D-03	4.46278D-03	2.4526D-06
5	6.2719D-03	2.5140D-03	3.6650D-06
6	7.2915D-03	3.5057D-03	2.3264D-06
7	2.6981D-03	1.3443D-03	2.1665D-06
8	6.6747D-03	3.2126D-03	2.1141D-06

On remarque que l'on a une diminution de l'erreur jusqu'à 3 itérations de Newton puis l'erreur semble se stabiliser voire augmenter. Cette stabilisation est plus nette si on fait les même calculs sur 10 jours, les erreurs sont représentées ci-après :

nb iter	err tang	err rad	err norm
0	0.1082	7.8944D-03	3.2178D-04
1	0.9126	0.5837	5.7319D-04
2	0.1450	1.2546D-02	1.0356D-04
3	0.1192	8.8656D-03	2.4775D-05
4	2.0556D-02	3.9571D-03	6.7655D-06
5	1.7774D-02	3.2477D-03	4.4404D-06
6	5.3966D-03	1.1244D-03	2.4380D-06
7	6.5832D-03	2.1561D-03	1.0162D-06

Dans ce cas l'erreur tangentielle est de l'ordre de 5×10^{-3} , et il semble que cette erreur se stabilise à cette valeur. Cette non convergence peut être due à la solution initiale qui est trop éloignée de la solution exacte mais elle peut aussi provenir de la mauvaise approximation de Jacobien. Pour étudier l'influence du Jacobien, nous

allons calculer les erreurs dans le cas où l'excentricité est moins faible puisque dans ce cas l'approximation du Jacobien est meilleure.

On se place donc dans le cas où $e = 0.05$ et $d = 0.8j$ on a les résultats suivants :

nb iter	err tang	err rad	err norm
0	1.6913D-02	1.8068D-03	2.3770D-04
1	5.0841D-03	2.4477D-04	1.1583D-05
2	1.1574D-04	1.8537D-05	7.2581D-07
3	1.8715D-06	5.0358D-07	1.8448D-08
4	1.4251D-08	4.1363D-09	1.5779D-10
5	3.0193D-10	1.2915D-10	1.0595D-12
6	4.8056D-12	2.2631D-12	1.6890D-14

Pour une durée d'éphéméride de 10 jours on obtient :

nb iter	err tang	err rad	err norm
0	0.1785	1.8541D-02	3.1486D-04
1	0.9278	0.7326	6.1144D-04
2	0.1396	9.9599D-03	1.3905D-04
3	0.1475	1.0961D-02	3.1002D-05
4	1.0178D-02	1.4629D-04	1.4624D-05
5	2.8136D-03	2.4166D-05	1.8474D-06
6	1.0027D-04	1.7458D-06	2.0304D-07
7	1.9568D-06	3.5004D-08	4.1544D-09
8	3.8931D-08	3.7725D-10	3.5247D-11

On observe, dans le premier cas la convergence de la méthode Newton après la 6 ième itération bien que les conditions initiales soient aussi éloignées de la solution que dans le cas de faible excentricité. Dans le deuxième cas, on observe aussi la convergence mais de façon moins rapide. Il apparaît, alors, que le Jacobien joue un rôle déterminant pour la convergence de la méthode et que la solution initiale influe sur la rapidité de cette convergence.

5.7 Parallélisme

Dans ce paragraphe, on étudie, les résultats de la parallélisation, et l'on compare avec la méthode de Cowell. On se place dans le cas suivant :

$e : 0.05$

$nz : 2$

d , $niter$, N varient. On ne fait pas de test de convergence pour pouvoir faire varier le nombre d'itérations de Newton. La machine utilisée est une machine Power Challenge SGI avec 8 processeurs.

5.7.1 Comparaison de Newton séquentiel par rapport à Cowell

On désire comparer la nouvelle méthode, dite méthode de Newton, à la méthode classique de Cowell. On étudie, dans un premier temps, l'exécution séquentielle de la méthode de Newton. Pour cela, on trace le rapport entre le temps d'exécution de Newton et celui de Cowell en fonction du nombre de pas $\frac{T}{h}$. On découpe l'intervalle de temps T en $N = 8$ et $N = 15$, on obtient les figures 10 et 11. On remarque que, plus on itère dans la méthode de Newton, plus les temps d'exécution sont longs par rapport à la méthode de Cowell. Le temps de Newton devrait être de l'ordre de $niter + 1$ fois plus que le temps de Cowell puisqu'on intègre l'équivalent de $niter + 1$ intervalles de longueur T . Mais, on n'a pas tout à fait ce rapport puisqu'après l'itération n , on intègre sur l'intervalle $[T_n, T]$ et non pas sur l'intervalle $[T_0, T]$.

5.7.2 Comparaison entre les temps d'exécution de Newton en séquentiel et les temps de Newton en parallèle

On désire, maintenant, étudier la parallélisation de la méthode de Newton. Pour cela, on trace le rapport *temps séquentiel* sur *temps parallèle* pour la méthode de Newton (ce qui correspond au speed-up de la parallélisation)

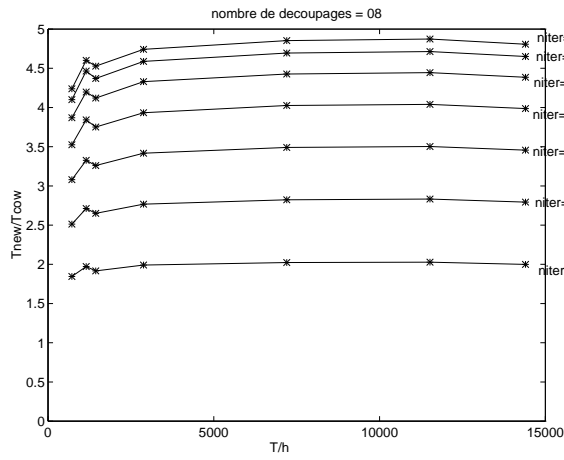


FIG. 10 –

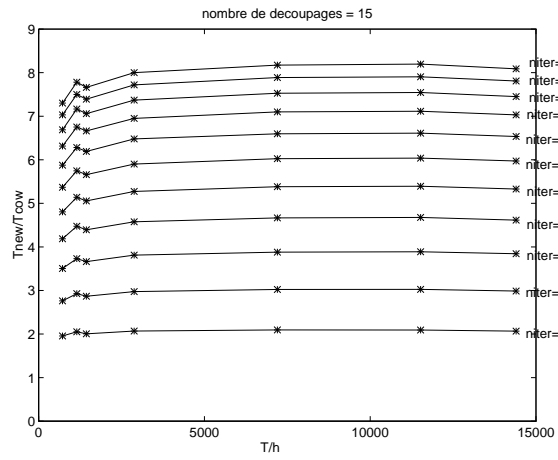


FIG. 11 –

en fonction du nombre de processeurs, pour 2 découpages différents (8 et 15) et pour 2 durées d'éphéméride différentes (1 jour et 8 jours). On obtient les figures (12), (13), (14), (15).

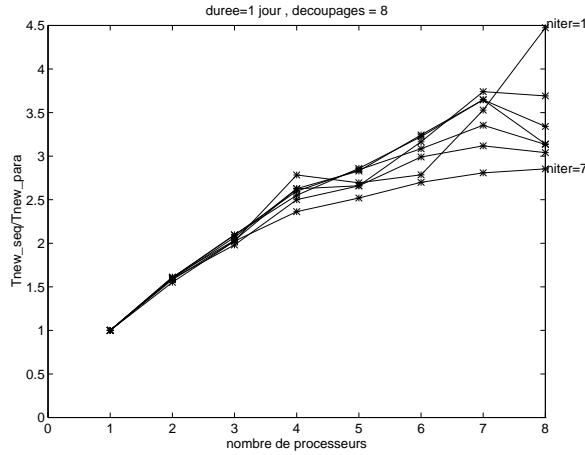


FIG. 12 –

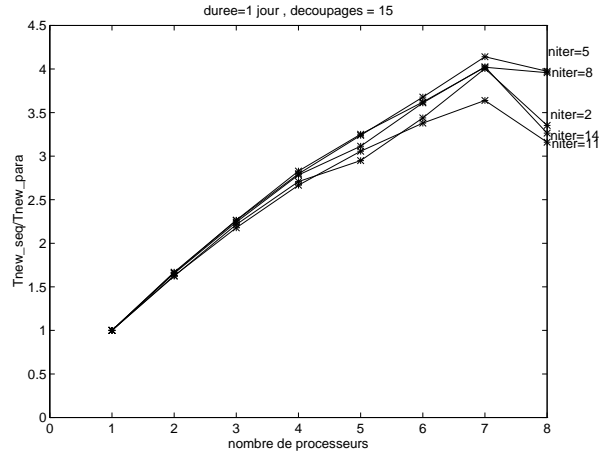


FIG. 13 –

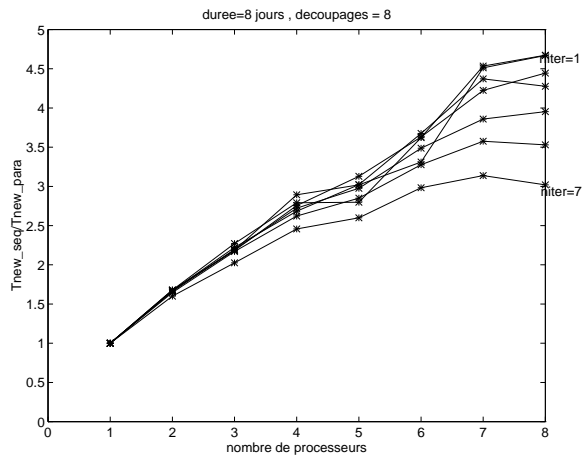


FIG. 14 –

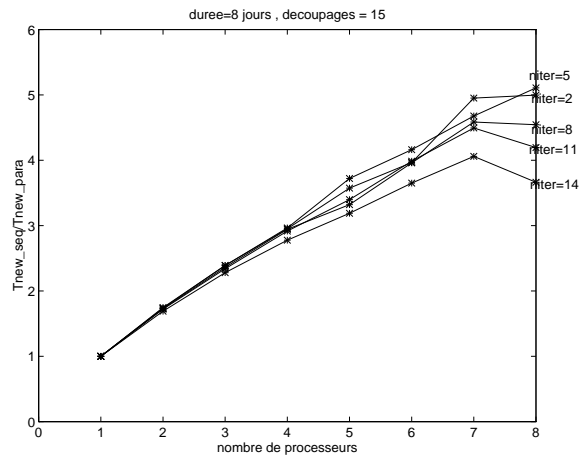


FIG. 15 –

Les temps d'exécution en parallèle dépendent du nombre de découpages de l'intervalle de temps (N) et du nombre de processeurs. En fait, si l'on a peu d'intervalles, un déséquilibre se crée au fur et à mesure que l'on augmente le nombre d'itérations. En effet, on perd un intervalle après chaque correction et donc au bout d'un certain nombre de corrections il y aura moins d'intervalles que de processeurs. Plus on itère et moins l'accélération est grande du fait de cette perte d'intervalle. Par exemple, avec un découpage en 15 intervalles, les courbes représentant les itérations sont plus regroupées et sont comprises entre 3 et 4,5 alors que pour un découpage en 8 intervalles elles sont entre 2,5 et 4,5. On remédiera à cet écueil en n'intégrant que dans une fenêtre glissante de $nproc$ sous-intervalles avec $nproc \ll N$.

5.7.3 Comparaison des temps d'exécution de Newton en parallèle et de Cowell

Enfin, on compare la méthode de Newton parallélisée avec la méthode de Cowell. Pour cela, on reprend les mêmes exemples que dans le paragraphe précédent et on trace le rapport *temps Cowell* sur *temps Newton parallèle* en fonction du nombre de processeurs. On obtient les figures (16),(17),(18),(19).

Dans le cas où le nombre de découpages est 8, seules les itérations 1 et 2 sont au dessus de la droite $y=1$, c'est à dire que la méthode est plus rapide que celle de Cowell dans le cas où 1 ou 2 corrections de Newton suffisent pour converger. Pour un découpage en 15 intervalles, on a moins de déséquilibre entre les processeurs et même si seules les courbes pour 1 ou 2 corrections sont valides, on remarque que l'on a beaucoup plus de courbes comprises entre 0,6 et 1 que pour une découpage en 8.

Pour une durée d'éphéméride de 8 jours, la méthode est plus rapide que celle de Cowell à condition de converger en 4 itérations maximum. Donc, pour avoir une accélération intéressante, il est nécessaire de converger en peu d'itérations de Newton (2 ou 3). Il apparait, alors, important d'avoir une condition initiale et un Jacobien précis. Le deuxième point est qu'il est important d'équilibrer les calculs sur les processeurs.

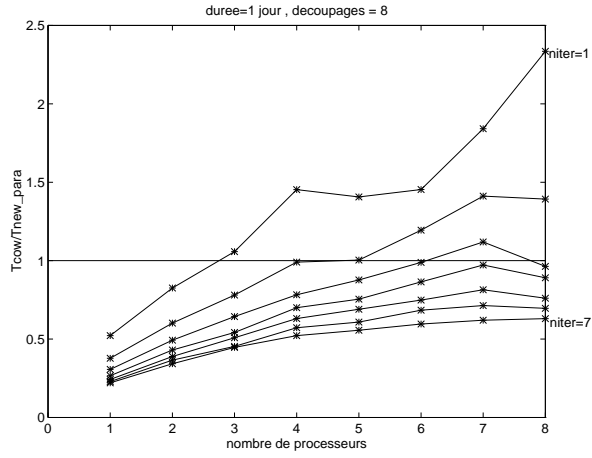


FIG. 16 –

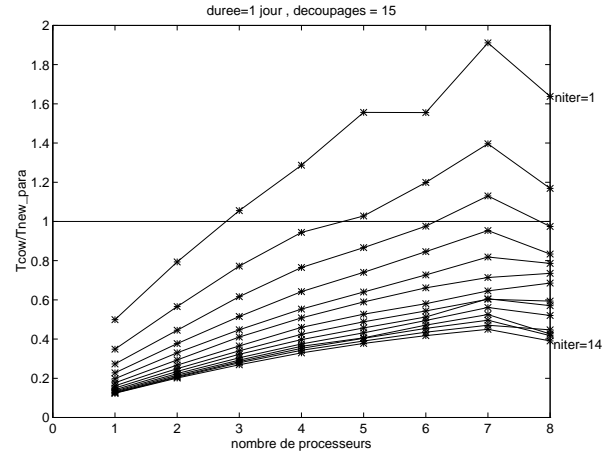


FIG. 17 –

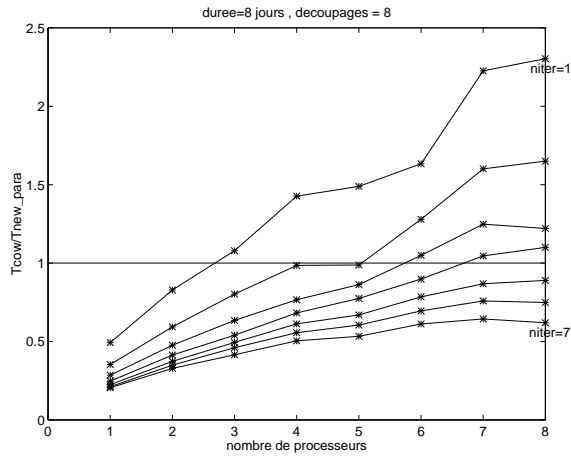


FIG. 18 –

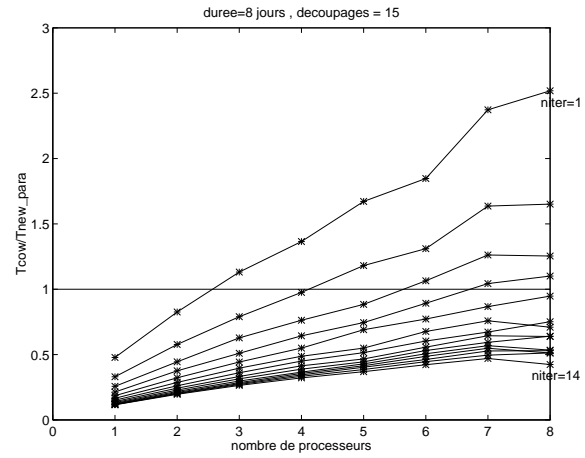


FIG. 19 –

6 Conclusion

Le but de cette étude était de concevoir une méthode de calcul d'orbites de satellites qui soit, à la fois, aussi précise que la méthode de Cowell (méthode utilisée par le CNES) et qui soit plus rapide. La méthode dite "méthode à travers le pas", adaptée au problème de calculs d'orbites, nous permet d'atteindre une bonne précision dans les calculs. Cette précision dépend du nombre d'itérations nécessaires pour converger. Or la convergence sera d'autant plus rapide que la solution initiale sera précise. En effet, le calcul d'orbites est un problème non dissipatif dont la condition initiale influe sur la solution finale. D'autre part, la méthode de Newton a une convergence locale quadratique. Les résultats numériques présentés dans ce rapport montrent que ce sont les précisions de la condition initiale et de son Jacobien qui déterminent la convergence ou non de la méthode ainsi que sa vitesse. Dans les cas où la méthode ne converge pas, il apparaît nécessaire de rechercher des modèles analytiques plus proche de la solution exacte. De tel modèles augmenteraient, alors, la vitesse de convergence et donneraient une meilleure parallélisation. Il existe des modèles basés sur l'intégration itérative des équations de Lagrange, qui sont plus précis que ceux que nous avons utilisés. Cependant, dans la plupart des cas, ces méthodes ne donnent pas explicitement la fonction qui calcule la solution à un instant donné et le Jacobien ne s'exprime plus de façon analytique. Il faut, alors, avoir recours à un calcul numérique du Jacobien ce qui augmente le coût de calcul. Notre recherche s'oriente maintenant vers la définition d'une méthode améliorée (meilleure condition initiale, meilleur Jacobien et diminution du coût de chaque itération). L'étude menée dans ce rapport nous permet d'être optimiste sur les chances de succès de la nouvelle version.

Références

- [1] A.Bellen and M.Zennaro. Parallel algorithms for initial value problems for difference and differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 25:341–350, 1989.
- [2] A.Deprit. The elimination of the parallax in satellite theory. *Celestial Mechanics*, 24:111–153, 1981.
- [3] Jean-Claude Agnès. Méthodes analytiques de calcul d'orbite par transformées de lie. Technical Report CT/TI/MS/MN/94-301, CNES (Centre National d'Etudes Spatiales), 1994.
- [4] C.Gear. Parallel methods for ordinary differential equations. Technical Report R-87-1369, 1986.
- [5] P. Chartier. L-stable parallel one-block methods for ordinary differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1993.
- [6] Philippe Chartier. *Parallélisme dans la résolution numérique des problèmes de valeur initiale pour les équations différentielles ordinaires et algébriques*. PhD thesis, Université de Rennes 1, 1993.
- [7] G. Wanner E. Hairer, S. P. Norsett. *Solving Ordinary Differential Equations I*. Springer-Verlag, second Revised Edition.
- [8] G.Campan F.Alby. Cours de technologie spatiale, mécanique spatiale. Technical Report CT/TI/MS/D/93.364, CNES (Centre Nationale des Etudes spatiales)., 1993.
- [9] Denis Hautesserres. Extrapolation de trajectoires spatiales, intégrateur de cowell. Technical Report CT/TI/MS/MN/95-050, CNES (Centre National d'Etudes Spatiales), 1995.
- [10] J.C.Butcher. Diagonally-implicit multi-stage integration methods. *Applied Numerical Mathematics*, 11:347–363, 1993.
- [11] J.C.Butcher. General linear methods for the parallel solution of ordinary differential equations. *World Scientific series in Applicable Analysis*, 2:99–111, 1993.
- [12] K.Burrage. *Parallel and sequential methods for ordinary differential equations*. Clarendon press . Oxford, 1995.
- [13] A.L.Mignot M.Crouseix. *Analyse numérique des équations différentielles*. Masson.
- [14] P.Beaugendre. Parallélisation du code mimosa. Technical report, Institut de Recherche en Informatique et Systèmes Aléatoires (I.R.I.S.A), 1995.
- [15] P.Chartier and B.Philippe. A parallel Shooting Technique for Solving Dissipative ODE's. *Computing*, 51(3-4):209–236, 1993.
- [16] S.L.Coffey and A.Deprit. Third-order Solution to the Main Problem in Satellite Theory. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 5:366–371, 1982.
- [17] S.L.Coffey and K.T.Alfriend. An analytic Orbit Prediction Program Generator. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 7(5):575–581, 1984.
- [18] Laurence Wauthier. *Utilisation du calcul formel en théorie analytique du mouvement des satellites artificiels*. PhD thesis, Université de Rennes 1, 1991.
- [19] O. Zarrouati. *Trajectoires spatiales*. CEPADUES.



Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399